

1. Mit nevezünk elemi eseménynek és eseménytérnek?

A kísérlet lehetséges kimeneteleit elemi eseményeknek nevezzük. Az adott kísérlethez tartozó elemi események halmazát eseménytérnek nevezzük, jele: X

2. Biztos esemény, lehetetlen esemény

Az X halmaznak megfelelő esemény a biztos esemény, tehát az az esemény, amelyik mindig bekövetkezik. Az üres halmaznak megfelelő esemény a lehetetlen esemény (jele: O), tehát az az esemény, amelyik sohasem következik be.

3. Mi az eseményalgebra?

Egy X eseménytérhez tartozó $A, B, C, \dots$ eseményeknek egy tetszőleges – az X és O eseményt tartalmazó – olyan halmazát, amely az események összeadására, szorzására és a komplementer képzésére nézve zárt, eseményalgebrának nevezzük.

4. Az A és B események egymást kizáró eseményeknek vagy idegen (diszjunkt) eseményeknek nevezzük, ha $AB=O$

5. Mi a teljes eseményrendszer?

Az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = X \text{ és } A_i A_j = O, 1 \leq i < j \leq n.$$

Azaz a teljes eseményrendszer eseményei páronként kizárják egymást és az események összege a biztos esemény. Más szavakkal: a teljes eseményrendszer eseményei közül egy és csakis egy mindig bekövetkezik.

6. A megszámlálhatatlan végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ esemény összege

$(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots)$ az az esemény, amely akkor és csak akkor következik be, ha az A_i ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$) események közül legalább egy bekövetkezik.

7. Mi a σ - algebra?

Az olyan eseményalgebrát, ahol megszámlálhatóan végtelen sok esemény összege is az eseményalgebrához tartozik σ - algebrának nevezzük.

Egy eseményalgebrát végesnek nevezünk, ha az eseménytér véges sok elemi eseményből áll.

8. Adjon példát egy olyan teljes eseményrendszerre, amelyben megszámlálhatóan végtelen sok esemény szerepel!

σ -algebra: megszámlálhatóan végtelen: $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n + \dots$ $[0,1)$ intervallumon

$A_i = \left[\frac{2^{i-2}}{2^i}; \frac{2^{i-1}}{2^i} \right)$ A_i ($i = 1, 2, \dots$) teljes eseményrendszert alkotnak, mivel az események közül egy és csak egy következik be.

9. Ismertesse a relatív gyakoriság tulajdonságait!

1. $0 \leq k \leq n \rightarrow 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$

2. Legyenek A és B események diszjunkt események. Jelölje k_A, k_B és k_{A+B} az A, B és $A+B$ események gyakoriságát. Az A és B események egyszerre nem következhetnek be, így

$$k_{A+B} = k_A + k_B, \text{ tehát } AB=O \text{ esetén } \frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$$

3. Az X biztos esemény mindig bekövetkezik, $k_X = n$, így a biztos esemény relatív gyakorisága

$$\frac{k_X}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

10. Ismertesse a valószínűségszámítás axiómáit:

1. Adott egy nem üres X halmaz, az eseménytér. Az eseménytér elemeit elemi eseményeknek nevezzük.
2. Adott az X részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ σ -algebrája. Az $\mathcal{A}$ -beli halmazokat elemi eseményeknek nevezzük
3. $A \in \mathcal{A}$ eseményhez hozzárendelünk egy $P(A)$ számot (az A esemény valószínűségét) úgy, hogy
 $0 \leq P(A) \leq 1$.
4. $P(X)=1$
5. Ha A és B egymást kizáró események, akkor $P(A+B)=P(A)+P(B)$
6. Ha $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ egymást páronként kizáró események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

11. Igazolja, hogy $A \subseteq B$ esetén $P(A) \leq P(B)$!

$$A \subseteq B \rightarrow A = AB$$

$$0 \leq P(B-A) \leq 1$$

$$B = A + \bar{A}B$$

$$0 \leq P(B) - P(A) \leq 1$$

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

$$0 \leq P(B) - P(A)$$

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(A) \leq P(B)$$

12. Mivel egyenlő két esemény különbségének valószínűsége?

$$\text{Tetszőleges } A \text{ és } B \text{ eseményekre } P(B-A)=P(B)-P(BA)$$

$$B = BX = B(A + \bar{A}) = BA + B\bar{A}$$

$$P(B) = P(BA + B\bar{A}) = P(BA) + P(B\bar{A})$$

$$P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$$

$$B\bar{A} = B - A$$

$$P(B - A) = P(B) - P(BA)$$

13. Tetszőleges A és B események esetén $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$A + B = AX + BX = A(B + \bar{B}) + B(A + \bar{A}) = AB + A\bar{B} + AB + B\bar{A} = A\bar{B} + AB + \bar{B}A$$

$$P(A + B) = P(A\bar{B} + AB + \bar{B}A) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{B}A) = P(A - B) + P(AB) + P(B - A)$$

$$P(A + B) = [P(A) - P(AB)] + P(AB) + [P(B) - P(AB)] = P(A) + P(B) - P(AB)$$

14. Igazolja, hogy egy teljes eseményrendszer elemeinek valószínűségét összegezve 1-et kapunk!

Ha a véges vagy végtelen sok $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ esemény teljes eseményrendszert alkot, akkor

$$\sum_i P(A_i) = 1$$

Mivel $\sum_i A_i = X$ és a rendszer elemei páronként kizárják egymást, így

$$P(X) = 1 = P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

15. Valószínűség eloszlás

A $p_i = P(A_i)$ számok mutatják, hogy hogyan oszlik meg az egységnyi valószínűség a teljes eseményrendszer eseményei között. Ennek analógiájára, ha a $p_i, (i = 1, 2, \dots)$ számokra teljesül, hogy $p_i \geq 0, (i = 1, 2, \dots)$ és $\sum_i p_i = 1$ akkor azt mondjuk, hogy a p_i számok valószínűség-eloszlást alkotnak. Ilyenkor valóban lehet is találni olyan kísérletet, eseményteret és egy $A_1, \dots, A_n, \dots$ teljes eseményrendszert úgy, hogy $P(A_i) = p_i$

16. Mi a klasszikus valószínűségi mező?

Az olyan véges eseményteret (és a rajta értelmezett valószínűséget), ahol az elemi események valószínűsége megegyezik, klasszikus valószínűségi mezőnek nevezzük.

17. Mivel egyenlő egy tetszőleges esemény valószínűsége klasszikus valószínűségi mezőben?

Klasszikus valószínűségi mezőben egy tetszőleges A esemény valószínűsége

$$P(A) = \frac{\text{az A esemény bekövetkezésére kedvező elemi események száma}}{\text{az összes elemi esemény száma}}$$

18. Geometriai valószínűség

Az elemi események egyenletes eloszlásúak a H halmazon, ha annak valószínűsége, hogy egy véletlenül választott elemi eseménynek megfelelő pont a H halmaz egy A mérhető részhalmazába essen egyenesen arányos a részhalmaz mértékével és független a részhalmaz helyzetétől, azaz $P(A) = \frac{m(A)}{m(H)}$ ahol $m(A)$ az A részhalmaz mértékét jelöli.

19. Hogyan értelmezzük a feltételes valószínűséget?

Egy A eseménynek a pozitív valószínűsége B eseményre, mint feltételre, vett feltételes valószínűsége

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Egy pozitív valószínűségű B esemény esetén tetszőleges A mérhető eseményre $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

20. A és C egymást kizáró események esetén hogyan lehet kiszámolnia $P(A+C|B)$ valószínűséget?

Ha A és C egymást kizáró események, akkor $P(B) \neq 0$ esetén

$$P(A + C|B) = \frac{P((A + C)B)}{P(B)} = \frac{P(AB + CB)}{P(B)} =$$

AC=0 miatt AB és CB is kizárják egymást

$$= \frac{P(AB) + P(CB)}{P(B)} = P(A|B) + P(C|B)$$

21. Tetszőleges A és B események esetén hogyan lehet kiszámolnia $P(A+B|C)$ valószínűséget?

Legyenek A és B tetszőleges események és a C esemény pozitív valószínűségű

Ekkor $P(A+B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$

22. Mikor nevezünk két eseményt függetlennek? Adjon meg ezzel ekvivalens állítást!

Az A eseményt függetlennek nevezzük a pozitív valószínűségű B eseménytől, ha

$P(A|B) = P(A)$ A definíció feltételezi, hogy $P(B) > 0$.

Az A és B események akkor és csak akkor függetlenek, ha $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

23. Teljesen független

Legyen adott az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ események egy véges vagy végtelen sorozata. Ezeket az eseményeket teljesen függetlennek nevezzük, ha bármelyik esemény független véges sok (tőle különböző) sorozatbeli elem szorzatától. Azaz tetszőleges j és k pozitív egész számok esetén

$P(A_j) = P(A_j | A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})$, ahol $i_1, i_2, \dots, i_k$ k darab tetszőleges, egymástól és j-től különböző egynél nagyobb természetes szám.

24. Ismertesse a teljes valószínűség tételét!

Alkossanak az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ események teljes eseményrendszert $P(A_i) \neq 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ és legyen B tetszőleges esemény. Ekkor fennáll, hogy

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$

25. Ismertesse a Bayes tételt!

Alkossanak az $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ események teljes eseményrendszert és legyen B egy tetszőleges esemény, továbbá a fenti események mindegyike legyen pozitív valószínűségű. Ekkor:

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k) P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)}$$

26. Adja meg a valószínűségi változó definícióját!

Az ω elemi események X halmazán értelmezett $\xi = \xi(\omega)$ valós értékű függvényt valószínűségi

változónak nevezzük, ha tetszőleges valós x esetén létezik a $P(\xi < x)$ valószínűség.

27. Hogyan értelmezzük egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét?

Az $F(x) = P(\xi < x)$ függvényt a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének nevezzük.

28. Binomiális eloszlás

Tetszőleges $n \geq 1$ természetes szám és $0 \leq p \leq 1$ esetén a ξ valószínűségi változó (n és p

paraméterű) binomiális eloszlású, ha ξ lehetséges értékei: 0, 1, 2, ..., n és

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

29. Geometriai eloszlás

Tetszőleges $0 < p < 1$ esetén a $k=0,1,2,\dots$ értékeket a $P(\xi = k) = p^k(1-p)$ valószínűséggel felvevő ξ valószínűségi változót geometriai eloszlásúnak nevezzük.

30. Poisson eloszlás

Tetszőleges $\lambda > 0$ valós szám esetén egy ξ valószínűségi változó (λ paraméterű) Poisson-eloszlású, ha ξ a $0,1,2,\dots$ nemnegatív egész értékeket rendre a

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\dots, (\lambda > 0)$$
 valószínűséggel veszi fel.

31. Milyen kapcsolat van a binomiális és a Poisson eloszlás között?

A binomiális eloszlás határeloszlása a Poisson-eloszlás, ha n tart a végtelenhez, de $np=\lambda$ állandó.

32. Kevert eloszlású

Egy valószínűségi változó lehet kevert eloszlású is, se nem diszkrét se nem folytonos.

33. Ismertesse az egyváltozós eloszlás függvény tulajdonságait!

Tetszőleges ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye rendelkezik a következő

tulajdonságokkal:

1. $F(x)$ monoton növekedő,

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

d. $F(x)$ balról folytonos, azaz $\lim_{x \rightarrow x_0-0} F(x) = F(x_0)$

34. Igazolja, hogy egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye monoton növekvő!

Legyen $x_1 < x_2$, ekkor a $\{\xi < x_2\}$ esemény tartalmazza a $\{\xi < x_1\}$ eseményt.

Igy $P(\xi < x_1) \leq P(\xi < x_2)$, azaz $F(x_1) \leq F(x_2)$ tehát az eloszlásfüggvény valóban monoton növekedő.

35. Hogyan értelmezzük a sűrűségfüggvényt?

Egy $f(x) \geq 0$ függvény a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény

tetszőleges x esetén előáll az $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ alakban.

Egy valószínűségi változót folytonosnak tekintünk, ha létezik sűrűségfüggvénye.

36. Adja meg a sűrűségfüggvény karakterisztikus tulajdonságait! Igazolja azokat!

1. $f(x) \geq 0 \rightarrow$ Mivel az eloszlásfüggvény monoton növekvő, így a deriváltja nem negatív

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \rightarrow$ az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény primitív függvénye $\rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = [F(t)]_{-\infty}^{\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$$

37. Egyenletes eloszlás

Az (a,b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b) \\ 0, & \text{ha } x \notin (a,b) \end{cases}$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \leq b \\ 1, & \text{ha } b < x \end{cases}$$

38. Exponenciális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változót λ -paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezünk, ha

sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

39. Mi az örökifjú tulajdonság? Milyen fontos/folytonos eloszlások rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal?

Egy ξ valószínűségi változó „örökifjú” tulajdonságú, ha tetszőleges pozitív a és c konstansok

esetén teljesül $P(\xi > c) = P(\xi > c + a | \xi > a)$.

Ha folytonos: Egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó „örökifjú” tulajdonságú.

Ha fontos: Exponenciális és geometriai

40. Normális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változót m és σ paraméterű normális eloszlásúnak nevezünk, ha

sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

alakú, ahol $\sigma > 0$, m tetszőleges állandó.

A ξ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

A normális eloszlást gyakran Gauss eloszlásnak is szokták nevezni.

41. Adja meg a várható érték definícióját!

Definíció1: Egy véges sok, $x_1, x_2, \dots, x_n$ értéket $p_1, p_2, \dots, p_n$ valószínűséggel felvevő diszkrét

valószínűségi változó $E(\xi)$ várható értéke $E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

Definíció2: Egy végtelen sok, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ értéket $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ valószínűséggel felvevő ξ

valószínűségi változó várható értéke $E(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ feltéve hogy a végtelen sor abszolút konvergens, azaz $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot p_i < +\infty$

Definíció3: Egy $f(x)$ sűrűségfüggvényű folytonos eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke

$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$, feltéve, hogy az improprius integrál konvergens és abszolút konvergens is, azaz $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx$ is konvergens.

42. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó és c egy tetszőleges konstans. Igazolja, hogy

$$E(\xi + c) = E(\xi) + c!$$

$$E(\xi + c) = \sum_i (x_i + c)p_i = \sum_i (x_i p_i + c p_i) = \sum_i (x_i p_i) + \sum_i c p_i = E(\xi) + c$$

43. Vezesse le egy egyenletes eloszlás várható értékének képletét az $[a, b]$ intervallumon!

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke: $E(\xi) = \frac{a+b}{2}$

Mivel ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

így

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2 - a^2}{2} \right] = \frac{a+b}{2}$$

44. Vezesse le az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értékét!

Az n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke: $E(\xi) = np$.

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^n k p_k =$$

Mivel $k=0$ esetben $k p_k = 0 p_0 = 0 p = 0$, így

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k p_k &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \sum_{k-1=0}^{n-1} np \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-1-(k-1)} = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = np \end{aligned}$$

$$\text{Mivel } \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = [p + (1-p)]^{n-1} = 1$$

45. Vezesse le egy Poisson eloszlású valószínűségi változó várható értékét!

A λ paraméterű Poisson eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke: $E(\xi)=\lambda$

Mivel ξ csak nemnegatív értékeket vesz fel, így a várható érték létezéséhez elegendő belátni a

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ sor konvergenciáját

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k =$$

Mivel a $k=0$ esetben $k p_k = 0 p_0 = 0 e^{-\lambda} = 0$, így

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

46. Vezesse le egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét!

A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\begin{matrix} u' = e^{-\lambda x} & u = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \\ v = \lambda x & v' = \lambda \end{matrix} \right] = [-x e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

Az első tag az alsó határ helyen nyilvánvalóan zérus, a felső határ helyen vett értékről Bernoulli-L'Hospital-szabállyal igazolható, hogy szintén nulla, így

$$E(\xi) = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

47. Vezesse le az m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó várható értékét!

Az m és σ paraméterű normális eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke: $E(\xi)=m$

$$\begin{aligned} E(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m \end{aligned}$$

48. Ismertesse a várható érték tulajdonságait!

1. Ha egy ξ valószínűségi változónak létezik a várható értéke, akkor tetszőleges c konstans

esetén a ξ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke és $E(c\xi)=cE(\xi)$

2. Ha egy ξ valószínűségi változónak létezik a várható értéke és b egy tetszőleges valós szám,

akkor a $(\xi+b)$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke és $E(\xi+b)=E(\xi)+b$

3. Legyen ξ korlátos valószínűségi változó, azaz $m_1 \leq \xi \leq m_2$, akkor létezik a ξ várható

értéke, és $m_1 \leq E(\xi) \leq m_2$.

49. Hogyan értelmezzük egy valószínűségi változó szórását?

A ξ valószínűségi változó $D^2(\xi)$ szórásnégyzete $D^2(\xi) = E([\xi - E(\xi)]^2)$, feltéve, hogy véges.

A ξ valószínűségi változó szórása a szórásnégyzetből vont pozitív négyzetgyök

$$D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)} = \sqrt{E([\xi - E(\xi)]^2)}$$

50. Ismertesse a szórás tulajdonságait!

Ha a ξ valószínűség változónak létezik a szórása, akkor tetszőleges b és c konstansok esetén

$$D(\xi + b) = D(\xi), \quad D(c\xi) = |c| D(\xi)$$

51. Standardizált

Ha egy nem konstans ξ valószínűségi változónak létezik az $E(\xi)$ várható értéke és $D(\xi) \neq 0$

szórása, akkor a ξ standardizáltja a $\frac{\xi - E(\xi)}{D(\xi)}$ valószínűségi változó. A standardizált

valószínűségi változó várható értéke nulla és szórása 1.

52. Igazoljon a szórás tulajdonságai közül kettőt!

$$D^2(\xi) = E([\xi - E(\xi)]^2) = E(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + E^2(\xi)) = E(\xi^2) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi)$$

$$D^2(\xi + b) = E([\xi + b] - E(\xi + b))^2 = E([\xi + b] - (E(\xi) + b))^2 = E([\xi - E(\xi)]^2) = D^2(\xi)$$

$$D^2(c\xi) = E\{[c\xi - E(c\xi)]^2\} = E\{[c\xi - cE(\xi)]^2\} = E\{[c(\xi - E(\xi))]^2\} = c^2 E\{[\xi - E(\xi)]^2\} = c^2 D^2(\xi)$$

Négyzetgyökvonás után a szórás pozitív volta miatt: $D(c\xi) = |c|D(\xi)$

53. Ismertesse a Markov-egyenlőtlenséget!

Legyen η egy nemnegatív értékeket felvevő valószínűségi változó, melynek létezik az $E(\eta)$

várható értéke. Tetszőleges c pozitív szám esetén $P(\eta \geq cE(\eta)) \leq \frac{1}{c}$

54. A Markov egyenlőtlenség alapján mit állíthat a $\xi \leq 0$ valószínűségi változó esetén a

$P(\xi < cE(\xi))$ valószínűségről? ($c > 0$)

$$P(\xi < cE(\xi)) = P(-\eta < cE(-\eta)) = P(-\eta < -cE(\eta)) = P(\eta > cE(\eta)) \leq \frac{1}{c}$$

55. Ismertesse a Csebisev-egyenlőtlenséget! – Mit állít a Csebisev egyenlőtlenség?

Ha a ξ valószínűségi változónak létezik az $E(\xi)$ várható értéke és a $D(\xi)$ szórása, akkor

tetszőleges $\lambda > 0$ esetén $P(|\xi - E(\xi)| \geq \lambda) \leq \frac{D^2(\xi)}{\lambda^2}$

56. Ismertesse a Bernoulli-tételt!

Tekintsünk egy kísérletet és egy hozzá tartozó p valószínűségű A eseményt. Ismételjük meg

a kísérletet egymástól függetlenül n -szer és jelölje ξ_n az A esemény gyakoriságát. Ekkor

tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számokhoz van olyan N , hogy $n \geq N$ esetén teljesül

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \delta$$

57. Adja meg a kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó definícióját!

Legyen adott az X eseménytéren értelmezett ξ és η valószínűségi változók. Az ω elemi

események X halmazán értelmezett $\zeta = \zeta(\omega) = (\xi(\omega), \eta(\omega))$ vektorértékű függvényt

kétdimenziós valószínűségi vektorváltozónak nevezzük, ha tetszőleges x, y valós számok

esetén létezik a $P(\xi < x, \eta < y)$ valószínűség.

58. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozók eloszlásfüggvénye

Az $F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$ kétváltozós függvényt a ξ és η valószínűségi változók együttes

eloszlásfüggvényének, vagy a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényének

nevezzük.

59. Peremeloszlás

$$\sum_i p_{ij} = q_i = P(\xi = x_i)$$

$$\sum_i p_{ij} = r_j = P(\eta = y_j)$$

$$\sum_{ij} p_{ij} = 1$$

60. Ismertesse a kétváltozós eloszlásfüggvény tulajdonságait!

Tetszőleges (ξ, η) vektorváltozó $F(x, y)$ eloszlásfüggvénye rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. $F(x, y)$ mindkét változójában monoton növekvő

2. $F(x, y)$ mindkét változójában balról folytonos

3. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$

4. $F(+\infty, +\infty) = 1$

5. Tetszőleges $a < b$ és $c < d$ esetén: $P(a \leq \xi < b, c \leq \eta < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$

61. A kétváltozós eloszlásfüggvény tulajdonságai közül bizonyítsa be egyet!

$F(x, y)$ mindkét változójában monoton növekvő.

Legyen $x_1 < x_2$ ekkor a $\{\xi < x_2, \eta < y\}$ esemény tartalmazza a $\{\xi < x_1, \eta < y\}$ eseményt.

Tehát $P\{\xi < x_1, \eta < y\} \leq P\{\xi < x_2, \eta < y\}$ azaz $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$.

Legyen $y_1 < y_2$ ekkor a $\{\xi < x, \eta < y_2\}$ esemény tartalmazza a $\{\xi < x, \eta < y_1\}$ eseményt.

Tehát $P\{\xi < x, \eta < y_1\} \leq P\{\xi < x, \eta < y_2\}$ azaz $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$.

62. Együttes sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény kapcsolata

A ξ és η valószínűségi változóknak akkor létezik az $f(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénye (a

(ξ, η) vektorváltozó sűrűségfüggvénye), ha tetszőleges x és y valós számok esetén az együttes

eloszlásfüggvény előáll az $F(x, y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) dv du$ alakban.

63. Egy kétdimenziós valószínűségi vektorváltozót folytonosnak nevezünk, ha létezik az együttes

sűrűségfüggvény.

64. Kétváltozós sűrűségfüggvény tulajdonságai

Tetszőleges kétváltozós sűrűségfüggvény esetén teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\int_{u=-\infty}^{+\infty} \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du = 1$

65. Adja meg egy valószínűségi vektorváltozó feltételes eloszlásfüggvényének a definícióját

diszkrét és folytonos esetre!

Diszkrét esetben: Legyen η egy tetszőleges valószínűségi változó és ξ diszkrét valószínűségi

változó. Az η valószínűségi változó $\xi=x$ feltétel mellett $F(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvénye

$F(y|x) = P(\eta \leq y | \xi = x)$ feltéve, hogy a $\xi=x$ esemény nem nulla valószínűségű, azaz az x a ξ

lehetséges értékeinek egyike. A folytonos eset ebből levezethető

$$F(y|x) = \frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{F'_{\xi}(x)}$$

66. Ha egy $f(y|x) \geq 0$ függvény kielégíti az $F(y|x) = \int_{-\infty}^y f(v|x) dv$ egyenletet minden olyan x

esetén, amelyre $f_x(x) \neq 0$, akkor ezt az η valószínűségi változónak a $\xi = x$ feltételre vett

$f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényének nevezzük.

67. Mikor nevezünk két valószínűségi változót függetlennek? Adjon ezzel ekvivalens tulajdonságot!

Az η valószínűségi változót függetlennek nevezzük a ξ valószínűségi változótól, ha $F(y|x) = F_\xi(y)$,

azaz, ha az η -nak a ξ -re vett feltételes eloszlása megegyezik az η feltétel nélküli eloszlásával.

Két valószínűségi változó akkor és csak akkor független, ha együttes eloszlásfüggvényük

előáll a peremeloszlásfüggvények szorzataként $F(x, y) = F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$, illetve ha létezik az

együttes sűrűségfüggvény, akkor teljesül $f(x, y) = f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)$.

68. A ξ és η valószínűségi változók korrelálatlanok. Mit állíthatunk a $\xi + \eta$ szórásnégyzetéről?

Mivel tetszőleges ζ valószínűségi változó esetén $D^2(\zeta) = E(\zeta^2) - E(\zeta)^2$, így

$$D^2(\xi + \eta) = E((\xi + \eta)^2) - (E(\xi + \eta))^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - [E(\xi) + E(\eta)]^2 =$$

$$= E(\xi^2) + 2E(\xi\eta) + E(\eta^2) - E^2(\xi) - 2E(\xi)E(\eta) - E^2(\eta) =$$

$$= E(\xi^2) - E^2(\xi) + E(\eta^2) - E^2(\eta) + 2[E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta)] = D^2(\xi) + D^2(\eta)$$

69. Mi a valószínűségi változók kovarianciája?

A ξ és η valószínűségi változók kovarianciája $\text{cov}(\xi, \eta) = E\{[\xi - E(\xi)][\eta - E(\eta)]\}$

70. Mi a korrelációs együttható és milyen tulajdonságai vannak?

A korrelációs együttható azt méri, hogy a két változó mennyire „lineárisan” függ egymástól.

A ξ és η változók korrelációs együtthatója

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi) D(\eta)} = \frac{E(\xi\eta) - E(\xi) \cdot E(\eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)}, \quad -1 \leq r(\xi, \eta) \leq 1$$

Független változók esetén a korrelációs együttható zérus, de $r(\xi, \eta) = 0$ esetén ξ és η nem

feltétlenül függetlenek.

A ξ és η valószínűségi változót korrelálatlannak nevezzük ha $r(\xi, \eta) = 0$.

71. $\eta = a\xi + b$ esetén számítsa ki ξ és η korrelációs együtthatóját!

$$r(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)} = \frac{E(\xi\eta) - E(\xi) \cdot E(\eta)}{D(\xi) \cdot D(\eta)}$$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E\{[\xi - E(\xi)][\eta - E(\eta)]\}$$

$$D^2(\xi) = E[(\xi - E(\xi))^2]$$

$$r(\xi, a\xi + b) = \frac{\text{cov}(\xi, a\xi + b)}{D(\xi) \cdot D(a\xi + b)} = \frac{E\{[\xi - E(\xi)][a\xi + b - E(a\xi + b)]\}}{D(\xi) \cdot D(a\xi + b)} = \frac{D(\xi) \cdot D(a\xi + b)}{D(\xi) \cdot [|a| \cdot D(\xi)]}$$

$$= \frac{a \cdot D^2(\xi)}{|a| \cdot D(\xi) \cdot D(\xi)} = \pm 1$$

Ha $\eta = a\xi + b$, η lineárisan függ ξ -től. A $D^2(\xi) = \text{cov}(\xi, a\xi + b)$ miatt $r(\xi, a\xi + b) = \text{sign}(a)$

$r(\xi, a\xi + b) = \pm 1$ az $a=0$ esetet kivéve.

72. Hogyan értelmezzük a kétdimenziós egyenletes eloszlást? Adja meg az együttes

sűrűségfüggvényt is!

Egy (ξ, η) valószínűségi vektorváltozót egy síkbeli T halmazon egyenletes eloszlásúnak

nevezünk, ha sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|T|}, & \text{ha } (x, y) \in T \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$, ahol $|T|$ a T halmaz területének

a mértékét jelöli.

A ξ és η valószínűségi vektor változóknak akkor van együttes sűrűségfüggvénye, ha

tetszőleges x és y valós számok esetén az együttes eloszlásfüggvény előáll az

$$F(x, y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) dv du \text{ alakban.}$$

73. Feltételes várható érték

Ha a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó diszkrét eloszlású, azaz ha a ξ és η valószínűségi

változók az $x_1, x_2, \dots$, ill. $y_1, y_2, \dots$ értékeket vehetik fel és $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = p_{ij}$, akkor az η

változónak a $\xi=x$ feltétel melletti feltételes várható értéke

$$E(\eta|\xi = x) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j P(\eta = y_j | \xi = x)$$

A feltételes várható érték csak az olyan $x = x_i$ értékekre értelmezett, amelyeket pozitív

valószínűséggel vesz fel a feltételben szereplő valószínűségi változó.

Legyen a folytonos eloszlású (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$.

Az η változónak a $\xi=x$ feltétel melletti feltételes várható értéke

$$E(\eta|\xi = x) = \int_{y=-\infty}^{+\infty} y f(y|x) dy \text{ feltéve hogy az integrál abszolút konvergens.}$$

74. Ismertesse a centrális határeloszlás tételét!

Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ teljesen független, azonos valószínűségi változók. Létezzen a

(közös) várható értékük $m = E(\xi_i)$ és (közös) szórásuk $\sigma = D(\xi_i)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

75. Írja fel a (ξ, η) valószínűségi vektor változó peremsűrűség függvényét az együttes

sűrűségfüggvény segítségével!

$$f(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y) \rightarrow f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv, f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

76. A (ξ, η) valószínűségi változó $f(x, y)$ együttes sűrűségfüggvénye előáll a peremsűrűségek

szorzataként $f(x, y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$. Igazolja, hogy az együttes eloszlás függvény is előáll a

peremeloszlás függvények szorzataként: $F(x, y) = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$!

$$f(x, y) = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f(u, v) dv du = \int_{u=-\infty}^x \int_{v=-\infty}^y f_{\xi}(u) \cdot f_{\eta}(v) dv du = \int_{u=-\infty}^x f_{\xi}(u) du \cdot \int_{v=-\infty}^y f_{\eta}(v) dv = F_{\xi}(x) \cdot F_{\eta}(y)$$

77. Ismertesse a regresszió fogalmát!

Ha ξ értékét rögzítenénk egy adott x értéknél, akkor az η értékei a feltételes várható érték

körül ingadoznának. Az η változónak a $\xi=x$ feltétel melletti feltételes várható értéke

$$E(\eta | \xi = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

,ha az integrál abszolút konvergens.